

Iteraties

Als je een getal met een formule bewerkt en dan het resultaat opnieuw met diezelfde formule, dan heet zo'n 'feed-back' van het vorige resultaat een 'iteratie'. Het eenvoudigste voorbeeld is tellen. Voor tellen is de formule $y = x + 1$. Daarbij staat x voor het vorige getal en y voor het resultaat dat in de volgende bewerking (iteratie) weer als x zal dienen om de volgende y te krijgen.

Om het aantal iteraties te kunnen bijhouden kun je beter schrijven:

$$x_{n+1} = x_n + 1 \quad (\text{Figuur 1})$$

Het aantal doorlopen iteraties is 'n'. De term x_{n+1} is dan telkens het volgende getal en x_n het vorige. Een computerprogramma begrijpt ook ' $x := x + 1$ ' (x wordt $x+1$). Als je die operatie n keer laat uitvoeren, dan wordt de beginwaarde x_0 telkens één eenheid groter en n ook. Bij $n = 10$ is x_{10} ook 10. Bij tellen vanaf 0 is het eindresultaat dus gelijk aan het aantal bewerkingen 'n' (als je tenminste 1 als eenheid aanhoudt). Kinderen maken dat onderscheid tussen bewerking en resultaat expliciet, als ze bij het overspringen naar de volgende vinger het resulterende getal noemen. Door optellende iteraties groeit x rechtlijnig, maar wel *schoksgewijs* (Figuur 1).

Als je nu een geen optellende, maar een vermenigvuldigende bewerking neemt, dan krijg je 'rente op rente'. Stel dat je 100 Euro (x_0) wegzet tegen een jaarlijkse rente van 1%, dan is jouw kapitaal volgend jaar $x_1 = x_0 * 1,01 = 101,00$ Euro, na het tweede jaar $x_2 = x_1 * 1,01 = 102,01$ en na 70 jaar $x_{70} = 200,68$ Euro. Dat is een schoksgewijze verdubbeling in 70 jaar. Meer algemeen voor elk jaar n is de formule:

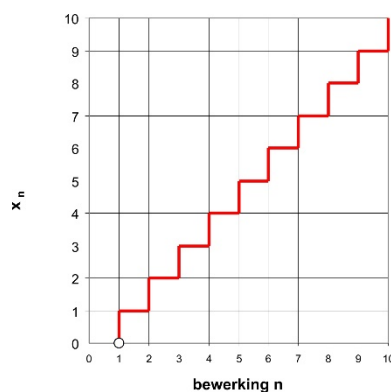
$$x_{n+1} = x_n * 1,01 \quad (\text{Figuur 2})$$

Er komt ieder jaar meer bij. Die bewerking groeit niet schoksgewijs rechtlijnig, maar 'exponentieel'. Je kunt het resultaat na n jaren namelijk ook schrijven als 'vloeiende' formule met een exponent n :

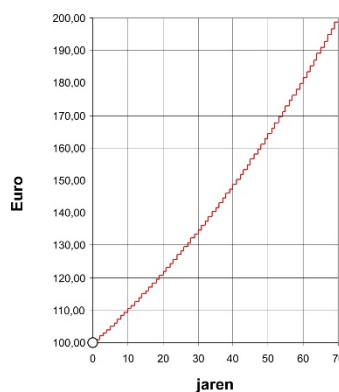
$$y = 100 * 1,01^n \quad (\text{Figuur 3})$$

De factor $1,01^{70}$ (het getal 1,01 wordt 70 keer met zichzelf vermenigvuldigd) is 2 (om precies te zijn zelfs iets meer). Het 'argument' 1,01 moet wel groter dan 1 zijn, anders *daalt* je kapitaal.

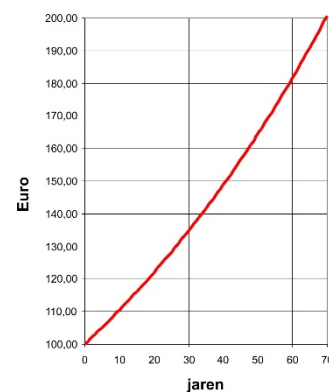
Die verdubbelingstijd van 70 jaar geldt dus bij 1% rente (het gedeelte achter de komma in 1,01) voor *elk* kapitaal. In de 'vloeiende' formule kun je n in willekeurig kleine stapjes laten verlopen zodat de grafiek niet als een trap schoksgewijs per jaar oploopt. Je kunt bijvoorbeeld ook $n=1/365$ of $n=2/365$ kiezen, zodat jouw kapitaal na één dag $100 * 1,01^{1/365}$ wordt, na twee dagen $100 * 1,01^{2/365}$ enzovoort.



Figuur 1 Tellen



Figuur 2 $x_{n+1} = x_n * 1,01$



Figuur 3 $y = 100 * 1,01^n$

Zowel bij optellen als bij vermenigvuldigen resulteert een oneindig aantal iteraties dus in een oneindig groot getal (de 'limiet' voor $n = 1 \rightarrow \infty$).

De tweede oneindigheid is alleen wel groter dan de eerste.

Zulke verschillen in oneindigheid kun je in geen enkele grafiek zichtbaar maken.

Je weet alleen dat ze wel moeten verschillen omdat de ene formule sneller groeit dan de andere.

Dat is dan een eerste les: er bestaan verschillende oneindigheden!

Wat gebeurt er nu, als je geen optellende of vermenigvuldigende iteraties, maar aftrekkende en delende neemt? In het eerste geval: 'aftellen' ($x_{n+1} = x_n - 1$), is de limiet een oneindig negatief getal. Maar het tweede geval, herhaald toepassen van $x_{n+1} = x_n / 1,01$ op zijn eigen resultaat is eigenlijk vermenigvuldigen met $1/1,01 \approx 0,99$:

$$x_{n+1} = x_n * 0,99 \quad (\text{Figuur 4})$$

Dat is een getal tussen nul en één. Daarmee zal het resultaat *dalen* tot bijna nul.

Dat gaat alleen steeds langzamer als je een steeds kleinere x_n met 0,99 vermenigvuldigt.

Je komt nooit op nul uit, hoe vaak je de bewerking ook herhaalt, maar wat we de 'limiet' noemen (doen alsof je iets oneindig kunt herhalen) is gewoon nul.

Nul lijkt dan het resultaat 'aan te trekken'. Het is de 'aantrekker' of 'attractor' van deze iteratie, maar nog geen 'vreemde attractor' die op een onverklaarbaar vreemde plaats ergens in het assenstelsel verschijnt zoals bij chaos en fractals. Daar wordt het pas echt interessant.

$$x_{n+1} = x_n^2 \quad (\text{Figuur 5 en Figuur 6})^a$$

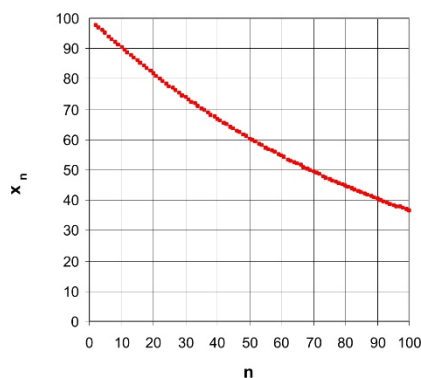
Eindeloos kwadrateren van een willekeurig getal groter dan 1, zoals je op een ouderwetse wetenschappelijke calculator (die staat waarschijnlijk ook op je computer) kon doen door telkens x^2 in te drukken, laat uiteindelijk een nog snellere groei zien dan telkens vermenigvuldigen met dezelfde 1+rente. Een negatieve beginwaarde x_0 wordt overigens al bij de eerste stap kwadrateren positief.

Bij herhaald kwadrateren van een getal x tussen nul en één *daalt* x weer tot vlak bij nul (Figuur 5).

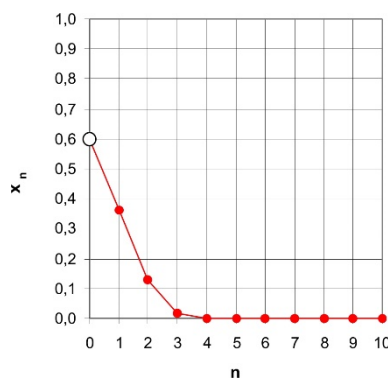
Begin je met $x_0 = 0,99$, dan gaat dat in het begin alleen nog niet zo hard, het wordt zo iets: } (Figuur 6).

Bij $x_0 = 1$ daalt x helemaal niet meer. Het blijft immers 1, omdat het kwadraat van 1 weer 1 is.

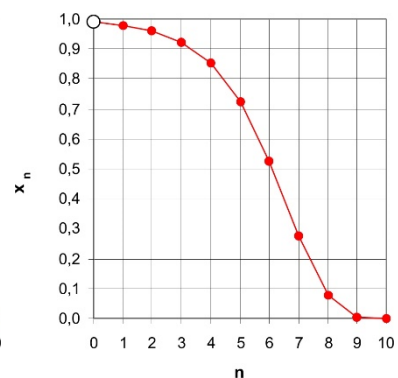
Tweede les: een klein verschil in de beginwaarde x_0 kan bij iteratie toch grote gevolgen hebben.



Figuur 4 $x_{n+1} = x_n * 0,99$; $x_0=100$



Figuur 5 $x_{n+1} = x_n^2$; $x_0=0,6$



Figuur 6 $x_{n+1} = x_n^2$; $x_0=0,99$

Het resultaat van de iteratie $x_{n+1} = x_n^2$ is dus wel iets anders dan de formule $y = x^2$, want dat resulteert in een parabool.

^a Deze figuren en de volgende zijn in Excel gemaakt. Download (sta bewerking toe) en experimenteer zelf met: [http://www.taekemdejong.nl/Publications/2015/Jong\(2015\)Iteraties\(Zoetermeer\)0413.xls](http://www.taekemdejong.nl/Publications/2015/Jong(2015)Iteraties(Zoetermeer)0413.xls)

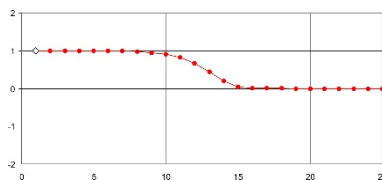
$$x_{n+1} = x_n^2 - \text{constante}$$

Figuur 7 t/m Figuur 9)

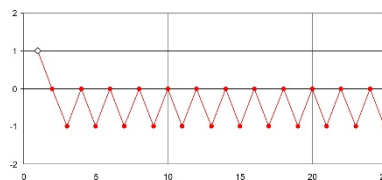
Trek je van het kwadraat vervolgens telkens eenzelfde constante af, dan kunnen er vreemde dingen gebeuren. Meneer Verhulst¹ uit België probeerde dat in 1844 voor het eerst, om als antwoord op meneer Malthus (1798)² een realistischer beeld te krijgen als een bevolkingsgroei tegen de grenzen van zijn bestaansmogelijkheden aanloopt. Hij creëerde de 'logistische' formule, in plaats van de toen gangbare exponentiële formule voor eindeloos doorgaande en ook nog toenemend snelle 'rente op rente' groei. Hij zette er nog een minteken voor om Figuur 6 $x_{n+1} = x_n^2$; $x_0=0,99$) en Figuur 7 (l) door omkering stijgend (f) te maken. Dat doe ik nog even niet om de formules eenvoudig te houden.

Kies je constante = 0, dan gebeurt er natuurlijk niets, het wordt gewoon een kwadraat (de vorige formule) zonder daar iets vanaf te trekken (Figuur 7). Figuur 6 lijkt dan ook op Figuur 7, maar in Figuur 7 is een nog kleinere x_0 gekozen (0,9999), zodat hij wat langer bij 1 blijft hangen.

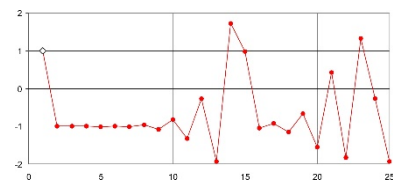
Tot constante = 0,2 blijft het l maar daarna gaat x al snel tussen twee waarden op en neer springen (In Figuur 8 is de constante 1). Voorbij 1,2 gaan die waarden onderling ook nog verschillen (eerst 4, dan 8 verschillende waarden enzovoort) en na 1,3 wordt het *chaos* (In Figuur 9 is de constante 2).



Figuur 7 $x_n^2 - 0$; $x_0=0,9999$



Figuur 8 $x_n^2 - 1$; $x_0=0,9999$



Figuur 9 $x_n^2 - 2$; $x_0=0,9999$

Voor deze grafiek kun je dan geen vloeiende formule meer bedenken, je kunt alleen maar itereren en kijken wat er uit komt. De kleinste verandering van de beginwaarde x_0 kan weer een totaal andere grafiek opleveren. Het kan zelfs zijn, dat op jouw computer iets anders verschijnt dan op de mijne.

Itererende formules met een kwadraat zijn 'niet lineair'. Kwadrateren verandert een eventueel negatieve voorganger in een positief getal, maar dat aftrekken kan het ook weer negatief maken. Daarom zijn die grafieken geen vloeiende krommen. De krommen zijn gebroken, 'fractaal'. Vergelijken met naastliggende waarden of elke waarde vermenigvuldigen met een oneindig klein stapje 'dx' en dan al die producten optellen (differentiëren en integreren) heeft dus geen zin. Het gedrag is 'niet integreerbaar', en dat was zeer frustrerend voor klassieke wiskundigen.³

We beperken ons nu verder tot iteraties met een beginwaarde x_0 tussen nul en één, want dan kan kwadrateren waarneembaar chaos opleveren in plaats van allerlei onwaarneembare oneindigheden.

Wat gebeurt er nu als je het resultaat van kwadrateren met een constante factor *vermenigvuldigt*? Niet veel schokkends. Bij lage beginwaarden lijkt het erop dat elke volgende stap de l-vorm versterkt met steeds dezelfde factor, maar het blijft een l-vorm.

Bij een beginwaarde = 1/factor is het een rechte lijn, maar bij hogere beginwaarden verdwijnt het resultaat al gauw in de oneindigheid.

Oneindigheden kun je niet in beeld brengen en vergelijken. Daar is dus weinig aan te beleven.

Als je nu van een vorig resultaat x_n telkens zijn (kleinere) kwadraat x_n^2 *afrekt*, dan wordt hun verschil nog kleiner, maar juist daar kan iets vreemds gebeuren. Het verschil tussen opéénvolgende waarden van x is dan alleen nauwelijks meer te onderscheiden.

Als je nu allebei telkens met een gelijke factor uitvergroot, dan kunnen je weer rare dingen zien.

$$x_{n+1} = \text{factor} * x_n - \text{factor} * x_n^2 \quad (\text{Figuur 10 t/m Figuur 12})$$

Kies je factor = 0, dan blijft het resultaat natuurlijk ook 0.

Kies je factor = 1, dan gebeurt er ook niet veel, want zo'n factor kun je gewoon weglaten.

Er ontstaat een grafiek die van elke beginwaarde x_0 met steeds kleinere verschillen afloopt richting nul. De verschillen richting nul zijn dan niet waarneembaar. De factor moet dus groter zijn dan 1 om het resultaat bij iedere stap te kunnen uitvergroten. Elke factor die afwijkt van één telt behoorlijk aan, want hij vergroot (of verkleint) $x_n - x_n^2$ niet één keer, maar bij elke stap opnieuw. De vergrotingen worden dan steeds groter.

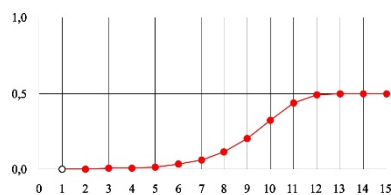
In onderstaande figuren Figuur 10 t/m Figuur 12 is de invloed van de factoren 2, 3 en 4 weergegeven. Het resultaat blijkt nu wel *heel* gevoelig voor de beginwaarde x_0 . In deze figuren is bijvoorbeeld $x_0 = 0,001$ aangehouden. Dat blijkt al een wereld van verschil met $x_0 = 0,000$, want dan blijft elke x_n eeuwig 0.

Bij zo'n kleine beginwaarde heeft de formule wel een paar stapjes nodig om op gang te komen, maar dan wordt ook wel duidelijk dat een vermenigvuldigingsfactor iets vergelijkbaars doet als de constante aftrek. Bovendien krijgt je in deze formule het minteken voor het kwadraat cadeau, zodat hij nu *groeit* zoals een gezonde bevolking dat ook doet.

Bij factor 2 krijg je daardoor een ordentelijk stijgende logistische (J) curve (Figuur 10).

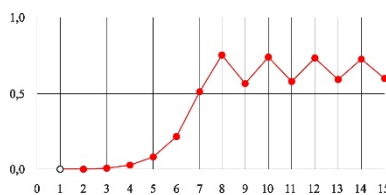
Het is bekend dat populaties gaan fluctueren als ze bij hun bestaansgrens in de buurt komen. De zwakste planten, dieren of mensen sterven massaal, zodat de sterkste weer ruimte krijgen, maar hun nakomelingen lopen op hun beurt opnieuw tegen de grenzen aan. Het lijkt of deze formule daarvoor gemaakt is, want dat gebeurt bij een factor = 3 (Figuur 11).

Bij populaties die zich heel snel voortplanten zoals insecten, krijg je een chaotisch op en neer springen, en dat wordt gesimuleerd bij factor = 4! Zo zou je met deze formule elke populatie kunnen simuleren door de juiste factor op te zoeken. Maar..., er is nog een andere parameter in het spel, en die is in de barre werkelijkheid nooit precies genoeg te meten: de beginwaarde x_0 .

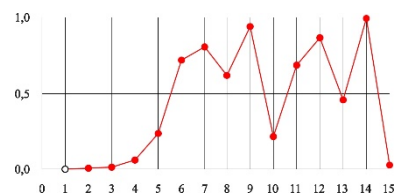


$x_0 = 0,001$

Figuur 10 $x_{n+1} = 2 * x_n - 2 * x_n^2$



Figuur 11 $x_{n+1} = 3 * x_n - 3 * x_n^2$



Figuur 12 $x_{n+1} = 4 * x_n - 4 * x_n^2$

Laten we dan de invloed van verschillende beginwaarden x_0 bij een constante factor maar eens bekijken.

Kies je factor = 2, dan stabiliseert de uitkomst zich na een aantal stappen op 0,5 (Figuur 10).

Die eerste stappen kunnen vloeiend naar 0,5 oplopen, maar ook eerst even niet vloeiend op en neer springen. Dat hangt dan af van de beginwaarde x_0 die je kiest.

Bij beginwaarden kleiner dan 0,1 wordt het, zoals hierboven al duidelijk werd, een soort 'logistische kromme' (J) die bij elke bevolkingsgroei bekend is: eerst langzaam, bijna horizontaal groeien, dan snel (bijna exponentieel) en tenslotte weer langzaam tot 0,5 als de bevolking de grenzen van haar bestaansbronnen nadert. Daarna blijft het weer 0,5.

Als je begint bij $x_0 = 0,5$, dan wordt het een horizontale rechte lijn: het blijft 0,5.

Als je x_0 groter dan 0,5 kiest, dan springt hij eerst even op en neer voor hij bij elke volgende stap tot in het oneindige op 0,5 blijft staan.

Kies je factor = 3, dan springt x_n na enkele stappen discontinu op en neer tussen twee vrijwel gelijke waarden, maar dat begint al bij 2,8.

Bij kleine x_0 beginwaarden kan het in het begin nog wel vloeiend oplopen, maar vroeg of laat begint het springen! Dat gebeurt ook bij populaties die aan de grenzen van hun bestaansbronnen zijn gekomen.

Als je de beginwaarde 0,333.. (1/3) kiest, wordt het weer een rechte lijn.

Dat gebeurt namelijk altijd als de factor een veelvoud van x_0 is, maar buiten die paar beginwaarden springt x_n heen en weer.

Kies je factor = 4, dan heb je weer chaos. Als je ook maar de kleinste verandering aanbrengt in de beginwaarde, dan volgen na voldoende stappen weer totaal andere waarden. De grafiek springt schijnbaar onvoorspelbaar tussen allerlei waarden, soms een eindje vloeiend, maar meestal discontinu. Er is een voorspelbaar deterministisch verband als je de beginwaarde precies (met een oneindig aantal cijfers achter de komma) weet, maar helaas zijn die voor praktische toepassingen nooit precies genoeg te bepalen voor een passende reeks.

Voor de eerste stappen begint de chaos al bij factor = 3,5, maar de chaos wordt eindeloos bij een factor = 3,57.... Dit bracht de wiskundigen in verwarring. Je herhaalt steeds dezelfde bewerking, en toch valt aan het chaotische resultaat geen touw meer vast te knopen.

Orde in de chaos

In 1980 bracht meneer Feigenbaum⁴ enige orde in de chaos. Meneer Smale⁵ had al opgemerkt dat het *aantal* verschillende waarden x_n in de buurt van factor = 3,57 zich na een aantal stappen voortdurend en met steeds kleinere tussenruimten *verdubbelt* ('bifurcatie'), zoals bij een boom waarvan de takjes zich almaar in tweeën splitsen. Als je nagaat hoe die takjes na een oneindig aantal stappen er uit zouden zien (vraag me niet hoe die limiet moet worden bepaald), dan kun je terugrekenen ('renormalisatie'). De voorgaande vertakking met precies dezelfde vorm bleek 4,669201609... keer zo groot. Die exacte 'zelfgelijkvormigheid' geldt tot en met de eerste vertakking.

Dat 'Feigenbaum getal' komt bij veel iteraties voor. Dat is bijvoorbeeld wel handig om te weten bij bevolkingsfluctuaties, of als de energie van een stroming aan de rand wordt overgedragen aan steeds kleinere kolken ('turbulentie'), zoals in pijpleidingen en bij wind aan het aardoppervlak.

Die boomvoorstelling van zelfgelijkvormigheid op schaalniveaus die een factor 4,669... uitéén liggen werd al gauw 'vijgenboom' genoemd.

Nu was in 1918 meneer Julia⁶ uit Frankrijk al op het briljante idee gekomen om *twee* onderling van elkaar afhankelijke iteratieve formules in een vlak als x- en y-coördinaat af te beelden:

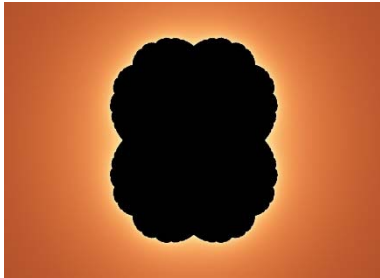
$$\begin{aligned} X_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + p \\ Y_{n+1} &= 2 * x_n * y_n + q \end{aligned} \quad (\text{Figuur 13 t/m Figuur 21})$$

Daar kunnen namelijk mooie figuren ('fractals') uit voortkomen als je de juiste beginwaarden x_0 en y_0 kiest. Om die te bepalen moet je echter zo diep in de wiskunde duiken, dat ik dat maar aan de experts overlaat. Er zijn simulatoren op het web te krijgen die dat voor ons doen^b.

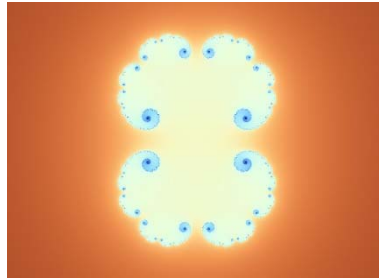
^b Voor de volgende figuren gebruik ik <http://fragtive.mimec.org/downloads>

De resulterende figuren vertellen al zoveel, dat die op zichzelf een zekere orde in de chaos brengen van een oneindig aantal mogelijke Juliafiguren. Ik beperk mij hier tot de invloed van de optelparameters p en q op de resulterende figuren. Als p en q beide nul zijn, dan krijg je een zuivere, gevulde cirkel, een schijf waarvan alle punten met elkaar 'verbonden' zijn. Laten we voorlopig q even op 0 houden en alleen p variëren.

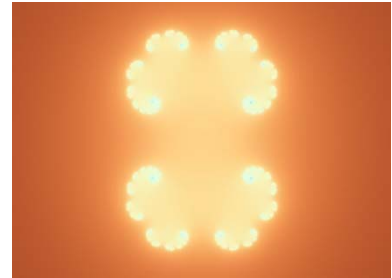
Als je $p = 0,2$ kiest, dan vervormt die cirkel tot Figuur 13.



Figuur 13 Julia $p=0,2$; $q=0$



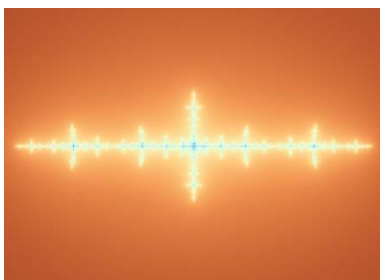
Figuur 14 Julia $p=0,3$; $q=0$



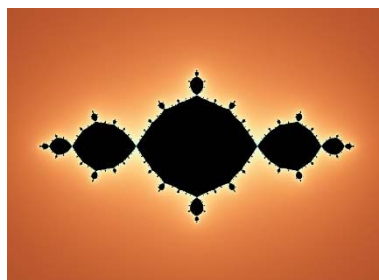
Figuur 15 Julia $p=0,4$; $q=0$

Bij $p = 0,3$ zijn de onderdelen daarvan los van elkaar geraakt en er worden allerlei spiraalvormige details zichtbaar die zich tot in de kleinste details herhalen als je de figuur uitvergroot (de iteratiestapjes verkleint). Bij $p = 0,4$ lijkt alles van elkaar losgeraakt.

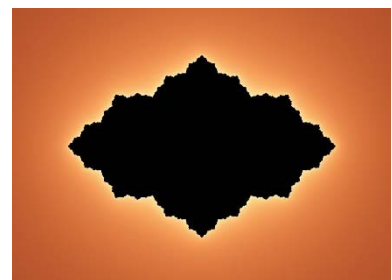
Nu de negatieve waarden van p . Die kun je dus vóór de vorige reeks plakken. Ik neem nu alleen een wat grotere afstand tussen de voorbeelden, namelijk 0,5.



Figuur 16 Julia $p=-1,5$; $q=0$

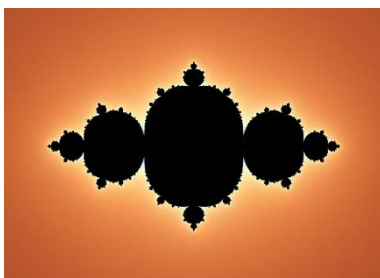


Figuur 17 Julia $p=-1$; $q=0$

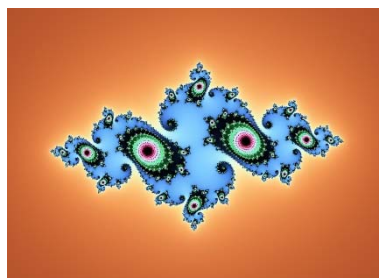


Figuur 18 Julia $p=-0,5$; $q=0$

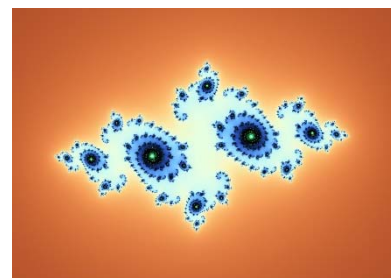
De interpretatie van deze verschillen tussen positieve en negatieve waarden van p laat ik aan de lezer over. Ik ga nu q variëren bij een constante waarde $p = -0,75$. Daar zitten namelijk leuke plaatjes.



Figuur 19 Julia $p=-0,75$; $q=0$



Figuur 20 Julia $p=-0,75$; $q=0,1$



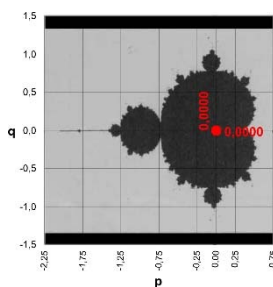
Figuur 21 Julia $p=-0,75$; $q=0,2$

Figuur 19 ($p = -0,75$) ligt dus precies tussen Figuur 17 ($p = -1$) en Figuur 18 ($p = -0,5$). Als we nu p hetzelfde ($p = -0,75$) houden en q variëren tussen 0 en 0,2, dan blijkt q de symmetrie-assen scheef te trekken, maar bij nog hogere waarden vallen ze ook uit elkaar.

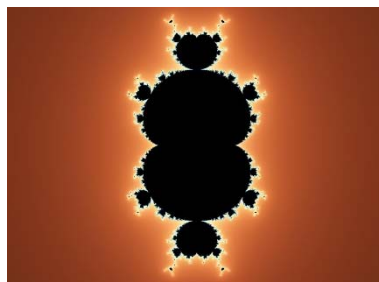
De negatieve waarden van q vallen precies zo uit elkaar als de positieve. Ze produceren bij hun negatieve waarden ook dezelfde figuren, maar hun symmetrie is door het minteken gespiegeld. Al deze Julia-figuren hebben symmetrie als gemeenschappelijk kenmerk. In de buurt van het uit elkaar vallen krijg je ook vaak repeterende spiralen te zien, als de simulator ze tenminste een kleur geeft bij verschillende maten van verbondenheid. Zwart betekent dan meestal, dat alle pixels volledig met elkaar verbonden zijn.

Het aantal figuren dat je kunt produceren door p en q te variëren is duizelingwekkend en niet in vloeiende formules te vatten. Je kunt alleen maar afwachten en kijken wat er bij iteratie uit komt. Meneer Julia werd dan ook door zijn collega-wiskundigen een halve eeuw vergeten, tot meneer Mandelbrot⁷ in 1980 op het lumineuze idee kwam om p en q zelf in een grafiek af te beelden op een x - en y -as, en daarin de grens van het uit elkaar vallen vast te leggen. Daar verschijnen immers de meest interessante beelden. Dat werd de beroemde Mandelbrot-verzameling (Figuur 22) en meneer Julia was weer helemaal terug in de belangstelling. Dat maakte hij helaas niet meer mee, want was hij kort daarvoor in 1978 overleden.

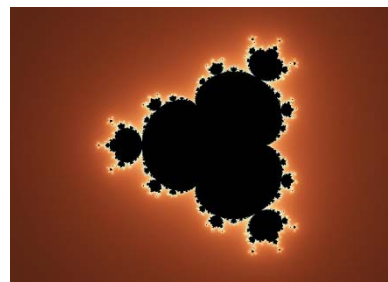
Deze revolutie was een grote stimulans voor onderzoek naar chaotische formules. Er kwamen nu niet alleen formules met kwadraten, maar ook met hogere machten waarvoor je Mandelbrot-sets kon maken (Figuur 23 en Figuur 24).



Figuur 22 p en q in de Mandelbrot set

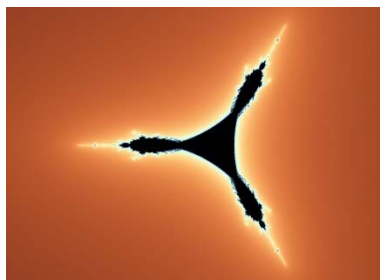


Figuur 23 Mandelbrot set voor derde machten

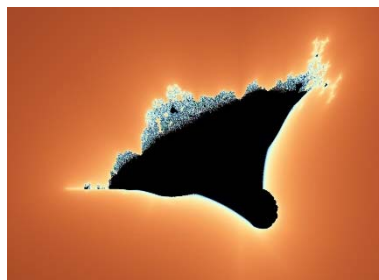


Figuur 24 Mandelbrot set voor vierde machten

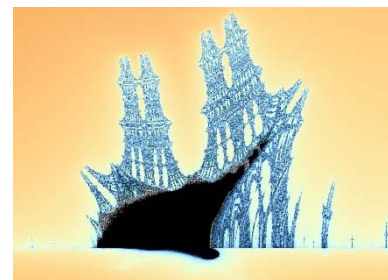
Verschiedene toevoegingen aan de eerste formule brachten weer andere varianten op de oorspronkelijke Mandelbrot set (Figuur 25 t/m Figuur 27).



Figuur 25 Conjugate Mandelbrot set



Figuur 26 Burning ship Mandelbrot set



Figuur 27 Vergroting van het uiterste linkerdeel in Figuur 26

Elk punt in deze figuren levert weer andere Julia-beelden, maar deze oneindige 'catalogi' van samenhangende Julia-beelden zijn zelf ook fractals die je eindeloos kunt vergroten door kleinere stapjes te nemen. Dat levert weer andere (nu Mandelbrot-) beelden zoals Figuur 27. Daarin herken je dan op onverwachte plaatsen het hele beeld weer terug geplaatst in een andere context. Nog steeds kan niemand uitleggen waarom dat gebeurt.

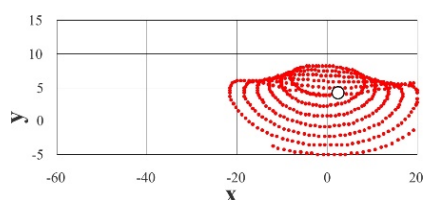
Nu begreep weerman Lorenz⁸ al in 1963 dat je voor de onvoorspelbare atmosfeer tenminste *drie* beginwaarden zoals luchtdruk- (x), temperatuur- (y) en vochtigheidsverschillen (z) precies moet weten om haar gedrag als een soort op alle assen verschuivende driedimensionale Juliafiguur te kunnen begrijpen. De fase waarin het weer zich bevindt kan dan worden uitgezet in een driedimensionale x-y-z grafiek, de 'faseruimte'. De volgende fase sluit daarop aan, maar bij het kleinste verschil in beginwaarden x_0 , y_0 en z_0 gaat het weer na enkele stappen al een totaal andere kant op. Hij bedacht nu drie onderling afhankelijke formules in die x-y-z faseruimte, met parameters s, r, b:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - s * (x_n - y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + x_n * (r - z_n - y_n) \\ z_{n+1} &= z_n + (x_n * y_n - b * z_n)\end{aligned} \quad (\text{Figuur 28 t/m Figuur 30})$$

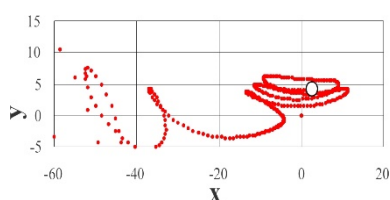
De resulterende kromme is dan het 'faseportret' van dit 'systeem' van vergelijkingen. Nu is het vreemde, dat waar je ook buiten deze kromme in de faseruimte begint, je komt uiteindelijk wel op zo'n vlinder uit waarvan je de parameters kunt opzoeken. Dit noemen ze nu de 'Lorenz attractor'.

Als je de stapjes klein genoeg maakt en dan alleen de eerste 500 stapjes in het x-y vlak bekijkt, dan begrijp je al wat er verder kan gebeuren. Als je r en b op 0 houdt en alleen s varieert, dan zie je een spiraal die om de as $x = 0$ lijkt te wentelen. Bij $s = 10$ lijkt het een slordig veertje met min of meer regelmatige windingen, maar bij $s = 30$ is het een veer met steeds wijdere windingen geworden (Figuur 28 is daarvan de x-y plattegrond). Boven de $s = 30$ worden die windingen alleen maar steeds wijder.

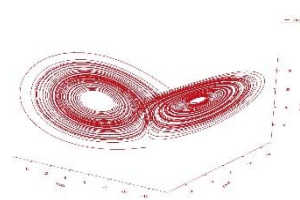
Als we bij die $s = 30$ de r vanaf 0 gaan variëren, dan gebeurt er bij $r = 1$ nog bijna niets, maar bij $r = 2$ maakt zich een winding los om bij $r = 3$ een eigen spiraal (Figuur 29) te vormen. Die tweede spiraal draait om een andere as. Daar verandert b vervolgens weinig aan, het beeld vervormt alleen wat. Lorenz onderzocht allereerst het gedrag van r (het 'Rayleigh- getal') bij $s=10$ en $b = 3/8$.



Figuur 28 Lorenz $s=30; r=0; b=0$



Figuur 29 Lorenz $s=30; r=3; b=0$



Figuur 30 Faseportret

Bij veel méér stappen krijg je dan Figuur 30.^c Met de parameters s, r en b kun je oneindig veel faseportretten maken die weinig met het echte weer te maken hebben, maar het kan helpen om te begrijpen waarom weervoorspelling zo moeilijk is.

Deze x, y en z zijn namelijk niet de enige dimensies die bij het weerbericht een rol spelen, dat zijn er veel meer. Het weer op langere termijn is alleen te voorspellen als je alle parameters en beginwaarden met een oneindig aantal cijfers achter de komma precies zou kunnen meten of bepalen. En dat kan dus niet.

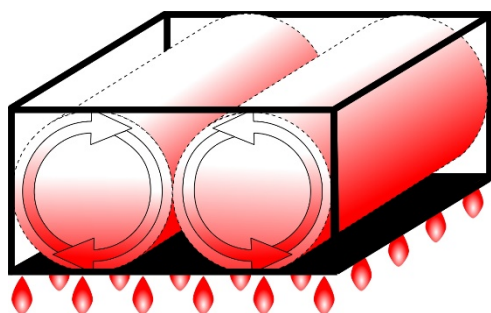
Je kunt hoogstens het faseportret herhaaldelijk doorlopen en de kans berekenen om in een bepaalde fase (bijvoorbeeld een wervelstorm) terecht te komen. Daar zit dan wel enige regelmaat in, maar wáár ter wereld die waarschijnlijk zal ontstaan, is daarmee nog niet zeker.

^c Hoe dat werkt, wordt prachtig uitgelegd op <http://www.chaos-math.org/nl/chaos-vii-vreemde-attractors>

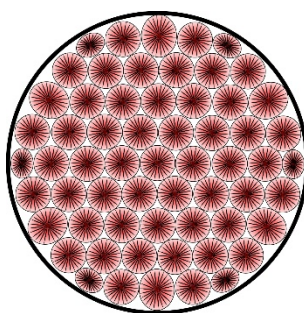
Lorenz liet zich inspireren door een bakje water dat door meneer Bénard⁹ in 1908 langzaam en heel gelijkmatig werd opgewarmd. Als je een vierkant bakje water zo opwarmt, dan verloopt de temperatuur van het water eerst regelmatig van beneden warm naar boven koud (alleen conductie). Dat is de eerste fase. In de tweede fase zet het water zich in beweging (convectie) omdat warm water iets lichter is dan koud water en dus (vooral in het midden) omhoog stijgt. Dat warme water vloeit afkoelend naar de wanden af en zo ontstaat een cyclus die, als je geluk hebt, het water in twee cilindrs laat draaien (Figuur 31).

Dat systeem wordt bij verder opwarmen echter al gauw verstoord. De cilinders gaan in de lengterichting golven en ten slotte gaat het water chaotisch borrelen. Dat is dan de derde fase. Wanneer die fase-overgangen precies plaats vinden wordt bepaald door het temperatuurverschil tussen onder en boven, de hoogte van het bakje, de zwaartekracht, de uitzetting van het water, zijn stroperigheid (viscositeit) en zijn bereidheid om te mengen. Die invloeden worden mooi samengevat in een formule die resulteert in het zogenaamde Rayleigh-getal.^d En dat was de parameter r van Lorenz!

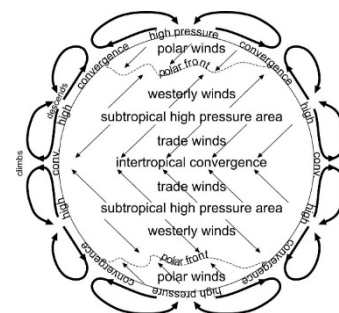
Als r kleiner is dan 1 (Figuur 28), dan is het water nog niet in beweging, er is alleen geleiding van de warmte (conductie) naar boven. Tussen $r = 1$ en 24,06 heb je kans om twee cilinders te zien draaien. In termen van Lorenz komt er een tweede 'aantrekker' (Figuur 29). Als r groter wordt dan 24,74 wordt het chaos. De spiralen van Lorenz lopen niet naar een centrum, maar verlopen naar de oneindigheid, waar ergens een derde vreemde aantrekker lijkt te zijn gaan werken.



Figuur 31 Cilindrische convectie



Figuur 32 Bénard cellen



Figuur 33 De atmosfeer

Meneer Bénard gebruikte echter een rond bakje, en dat geeft, als je geluk hebt, een patroon van ronde, donutachtige cellen die zich in een zeshoekig patroon schikken (Figuur 32). Zulke donuts ('torussen') vind je ook op veel grotere schaal in lucht (Figuur 33).

Als je heel globaal de dominante luchtstroming op wereldschaal bekijkt, dan daalt afkoelende lucht aan de polen neer en stijgt opwarmende lucht aan de evenaar op, zodat een constante luchtcirculatie ontstaat. De in de tropen opgestegen lucht koelt echter op weg naar de polen al eerder af en daalt in de subtropen neer, om aan het aardoppervlak (als voor ons waarneembare wind) zijn weg naar het noorden en zuiden te zoeken. Daardoor ontstaan op elk van beide halfronden in principe drie torusvormige luchtcirculaties die als tandwielen in elkaar grijpen (Figuur 33). Je moet ook een oneven aantal tandwielen hebben om weer met de klok mee te draaien.

Tijdens dat proces verplaatst de hele atmosfeer zich echter ook nog met de aarde van west naar oost. Aan de evenaar is dat ruim 1600 km/uur, maar in Nederland 1000 km/uur, zodat op onze kleinere noordelijke breedtecirkel de dominante wind richting pool door zijn oostwaartse

^d http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh%E2%80%93B%C3%A9nard_convection

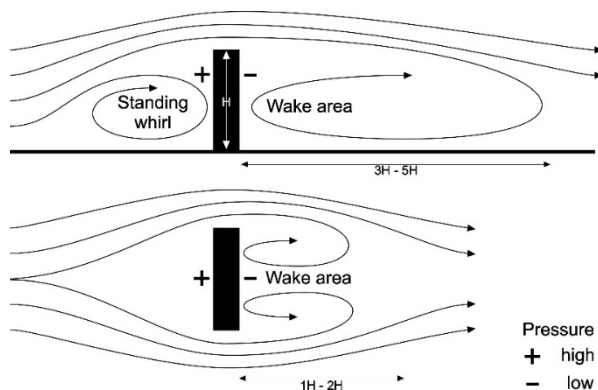
snelheidsimpuls van de grotere breedtecirkels, uit het zuidwesten komt.

Ten zuiden van de subtropen komt hij daarentegen van de pool af uit het noordoosten.

Zeelieden op weg naar Amerika varen dan ook sinds jaar en dag eerst naar het zuiden om daar de 'trade winds' (NO-passaten) op te zoeken en vanuit Amerika eerst naar het noorden om vandaar terug naar Europa de westenwind te benutten (Figuur 34).

Het oceaانwater laat zich door deze winden ook nog opdrijven, zodat een grote oceaانwervel (de Golfstroom) de schepen onder water nog eens een zetje meegeven.

Op de grens van de atmosfeer en het aardoppervlak ontstaan in de lucht achter bergen en gebouwen vervolgens weer allerlei kleinere wervels als tegengesteld draaiende kleinere tandwielen (Figuur 34). Daar zoekt de opgehoopte lucht zich weer een uitweg in een kurketrekker-beweging naar boven of verloopt achter het obstakel in een reeks verticale wervels (een von Kármán vortex straat). Dat kun je soms ook op grotere schaal waarnemen aan de wolken die achter een eiland kolken (Figuur 35).



Figuur 34 Wervels achter obstakels



Figuur 35 Kármán vortex straat bij Californië^a

Alsof dat nog niet ingewikkeld genoeg is, ontmoeten in de tropen en aan het polaire front tegengestelde winden elkaar (Figuur 33). Daar ontstaan dan weer andere aan twee kanten aangedreven horizontale of verticale wervels die wij wervelstormen noemen als ze de grond raken. Zo komen er nog wel een paar parameters bij om van besloten het bakje van Bénard dichter bij de open werkelijkheid te komen: snelheid en eindeloos variërend reliëf van het aardoppervlak bijvoorbeeld. Aan het voorspellen met precieze beginwaarden hoeven we voorlopig niet te denken.

Meneer Wolfram¹⁰ heeft de moed echter nog niet opgegeven. Volgens mij legt hij in ruim 1250 bladzijden uit dat we de zaak moeten omkeren en alle denkbare fractale en chaotische structuren vergelijken met wat we in de werkelijkheid aantreffen, tot we iets gevonden hebben dat er op lijkt. Daar is hij dan met zijn internetvereniging van plaatjeskijkers nog wel even mee bezig.

In de fractals viel mij de telkens terugkerende spiralen op. Die vinden we in tal van echte stromingen ook. Dat ligt wel voor de hand, als gelijksoortige processen zich op steeds kleinere schaal herhalen, maar dat is alleen maar vormgelijkenis. Zodra in de evolutie halfdoorlatende membranen ontstaan, gaan de processen aan weerszijde verschillen. Als membranen zich selectief afsluiten tot een cel, dan gelden daarbinnen andere wetten. Als daarbinnen zich weer membranen ontwikkelen kunnen er talloze nieuwe milieus ontstaan met weer eigen wetten. Overal verschuiven de parameters voor druk, vochtgehalte, temperatuurverschil, maat, de uitzetting van materiaal, zijn viscositeit en bereidheid om te mengen. Vooral die bereidheid om te mengen wordt door membranen belemmerd, en dat gooit roet in het eten van de chaos-optimisten.

^a <http://fuckyeahfluidynamics.tumblr.com/post/1093448891/the-von-karman-vortex-street-isnt-just-found-in>

Er is bij levensverschijnselen veeleer een neiging om door scheiding te ontmengen, verschillende processen een eigen plaats te geven (orgaanvorming, organisatie). De entropie (een oud woord voor wanorde) wordt op kleine schaal aan banden gelegd, betaald met toegenomen wanorde buiten de afgesloten ruimte. Er ontstaan organen en organismen met verschillende functies en aangepast gedrag. Er ontstaat een organisatie, en dat is iets totaal anders dan (zelf)gelijkvormigheid.

Bomen en blaadjes mogen dan op elkaar lijken, maar elke boom is anders en elk blad aan één boom is anders. Die diversiteit is de crux van de levende natuur. Voortplanting mag dan doen denken aan zelfgelijkvormigheid, maar je bent beslist anders dan je ouders, al lijkt je ook op hen. Elke soort is anders en binnen elke soort is ieder exemplaar anders. Om het voor de generaliserende wetenschap nog erger te maken komt ieder exemplaar ook nog in een andere context terecht waardoor ook zijn historie, ervaring en gedrag anders zal zijn. Gerekend in miljoenen jaren zijn jouw voorouders zelfs een andere soort. De formule voor evolutie is eenvoudig: voortplanten en doodgaan. Dat voortplanten moet varianten opleveren. Wat daarvan overleeft evolueert verder, de rest sterft uit. Die formule werkt niet bij gelijkvormigheid, maar alleen bij variatie.

Dat iteratie van formules soms gelijkvormige en verbazingwekkende patronen oplevert die aan natuurlijke verschijnselen doen denken berust op herhaling van zetten en mag dus geen verbazing wekken. Dat is geen *zelforganisatie* (het vormen van organen), het is patroonvorming. Zelfgelijkvormigheid naast elkaar of op verschillende schaalniveaus zoals spiralen en wervels komen in levende organismen nauwelijks voor. Binnen de overeenkomsten zijn er altijd kleine verschillen met grote gevolgen. Het grote gevolg voor de evolutie als geheel is risicodekking.

In de samenleving van verschillende organismen zoals bestudeerd in de ecologie lijkt het daar soms wel op, maar het is toch nooit precies hetzelfde. Tussen de schaalniveaus met een straal van 3000km tot 30m is het menselijke verkeersnetwerk soms globaal met een factor 3 zelfgelijkvormig¹¹, maar daarvoor en daarna houdt het op. De meeste andere (mens)ecologische verschijnselen moeten op elk schaalniveau afzonderlijk bestudeerd worden. Dan kan er zelfs sprake zijn van een schaalparadox¹², het omkeren van conclusies bij een schaalverschil van ongeveer 3 lineair (10 in oppervlakte).

¹ Verhulst(1845)*Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*(Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles)18 1–42

Verhulst(1847)*Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*(Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique)20 1–32.

² Malthus(1807)*An Essay on the Principle of Population, or a View of Its Past and Present Effects on Human Happiness, with An Enquiry into Our Prospects Respecting the Future Removal or Mitigation of the Evils Which It Occasions*(London)Johnson

³ Peitgen(1986)*The beauty of fractals*(Berlin)Springer

Steward(1989)*Speelt God een spelletje De structuur van de chaos*(Utrecht 1991)Spectrum Aula

Tennekes(1990)*De vlinder van Lorenz*(Bloemendaal)Aramith

Gleick(1991)*Chaos De derde wetenschappelijke revolutie*(Amsterdam)Contact

⁴ Feigenbaum(1978)*Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations*(J Stat Phys)19 25–52

⁵ Smale(1974)*Sufficient conditions for an optimum*((Proc Sympos Appl Topology and Dynamical Systems, Univ Warwick, Coventry)p 287-292

⁶ Julia(1918)*Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*(Journal de Math. Pure et Appl)**8** (1918), 47-245

⁷ Mandelbrot(1977)*Fractals: Form, Chance and Dimension*(New York)Freeman & Co

Mandelbrot(1982)*The Fractal Geometry of Nature*(New York)Freeman & Co

⁸ Lorenz(1963)*Deterministic nonperiodic flow*(J Atmospheric of the Sciences)20 130-141

⁹ Benard(1900)*Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide*(Rev Gen Sci pures et appl)11 1261-1271 & 1309-1328

¹⁰ Wolfram(2002)*A new kind of science*(Champaign)Wolfram media

¹¹ Nes(2000)Scale Factor 3 For Hierarchical Road Networks A Natural Phenomenon?(Delft)University of Technology Trail

¹² Jong(2008) *Scale articulation* (Zoetermeer)
<http://www.taekemdejong.nl/Publications/2008/Scale%20articulation.doc>